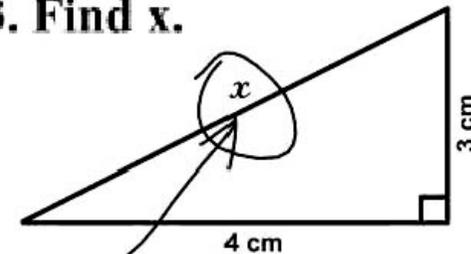




Computergraphik

Kurze Wiederholung in Geometrie

3. Find x .



Here it is

G. Zachmann

University of Bremen, Germany

cgvr.cs.uni-bremen.de

- Notation: in dieser VL schreiben wir Vektoren mit kleinen fetten Buchstaben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

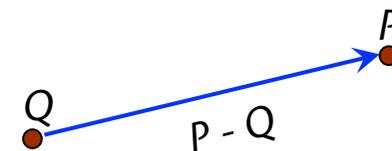
- Betrag / Länge:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = a$$

- Beweis:

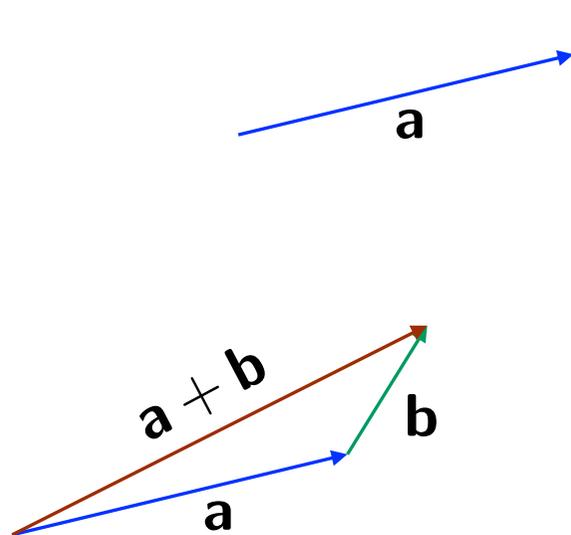
Unterschied zwischen Punkten und Vektoren

- Notation: Punkte mit normalen Großbuchstaben
- Achtung: **Punkt** \neq **Vektor** !
- Unterschiedliche Bedeutung:
 - Punkt = Ort im Raum
 - Vektor = Richtung + Länge = Verschiebungsoperator
- Merkregeln:
 - Punkt + Vektor = Punkt
 - Vektor + Vektor = Vektor
 - Punkt - Punkt = Vektor (Notation: \overline{QP})
 - Punkt + Punkt = **undefiniert**!
 - Korrespondenz mittels Ursprungspunkt O (\rightarrow **Ortsvektor**):

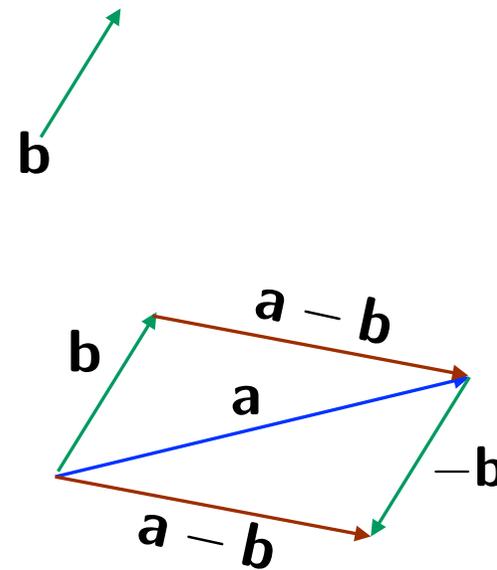


$$\mathbf{p} = P - O \quad P = O + \mathbf{p}$$

- Geometrische Interpretation der Vektor-Addition und Vektor-Subtraktion:



Addition



Subtraktion

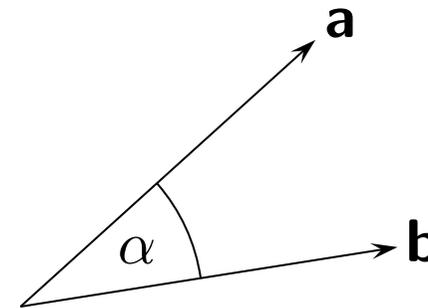
Das Skalarprodukt (*dot product*)

- Definition:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Eine geometrische Interpretation:

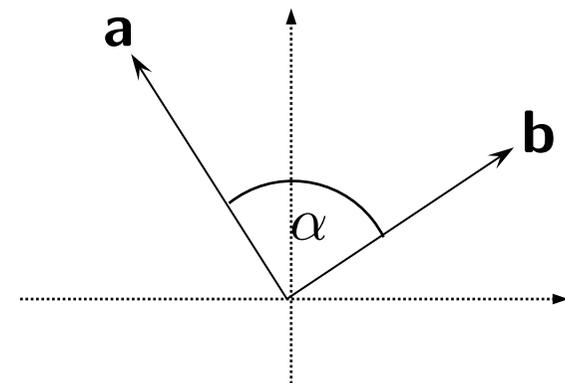
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha$$



- Beweis (2D):

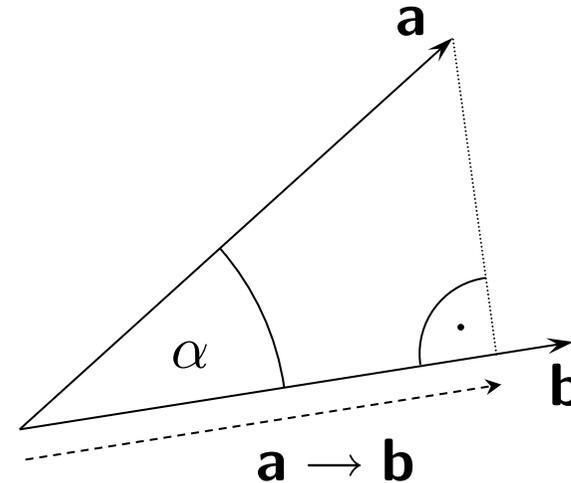
- Sei θ_a = Winkel zwischen \mathbf{a} und x-Achse
- Damit ist

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\theta_a - \theta_b) \\ &= \cos \theta_a \cos \theta_b + \sin \theta_a \sin \theta_b \\ &= \frac{a_x}{|\mathbf{a}|} \frac{b_x}{|\mathbf{b}|} + \frac{a_y}{|\mathbf{a}|} \frac{b_y}{|\mathbf{b}|} \end{aligned}$$



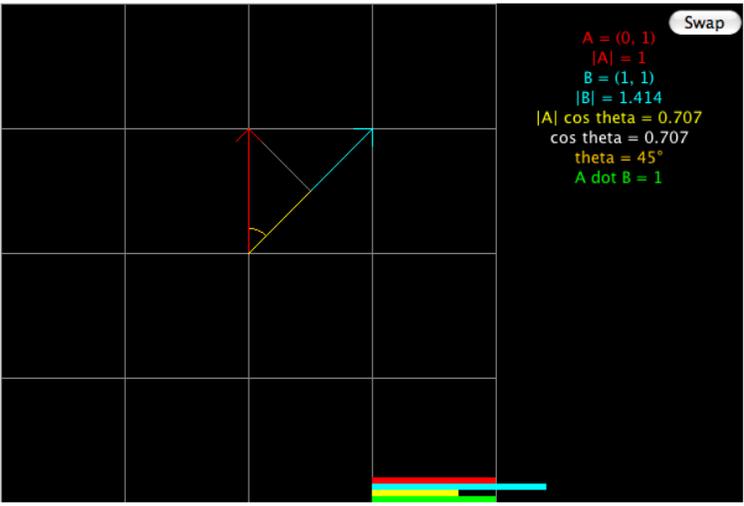
- Die senkrechte Projektion:

$$|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$



- Mit anderen Worten: das Skalarprodukt lässt sich als senkrechte Projektion auf einen Einheitsvektor interpretieren;
d.h., falls $|\mathbf{e}| = 1$
dann ist $|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{e}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}$

Demo zum Skalarprodukt (dot product)



Dot Product

file:///Users/zach/Documents/Lehre/CG1/demos/dot%20product/ Google

Intrade Bahn Apple Discussions TUAW WOT

Dot Product

Swap

$A = (0, 1)$
 $|A| = 1$
 $B = (1, 1)$
 $|B| = 1.414$
 $|A| \cos \theta = 0.707$
 $\cos \theta = 0.707$
 $\theta = 45^\circ$
 $A \cdot B = 1$

This java applet demonstrates the [dot product](#), which is an important concept in linear algebra and physics. The goal of this applet is to help you visualize what the dot product geometrically.

Two vectors are shown, one in red (A) and one in blue (B). On the right, the coordinates of both vectors and their lengths are shown. The projection of A onto B is shown in yellow, and the angle between the two is shown in orange.

At the bottom of the screen are four bars which show the magnitude of four quantities: the length of A (red), the length of B (blue), the length of the projection of A onto B (yellow), and the dot product of A and B (green). Some of these quantities may be negative.

To modify a vector, click on its arrowhead and drag it around. To swap A and B, click the swap button. Swapping the two does not change the dot product.

Display a menu

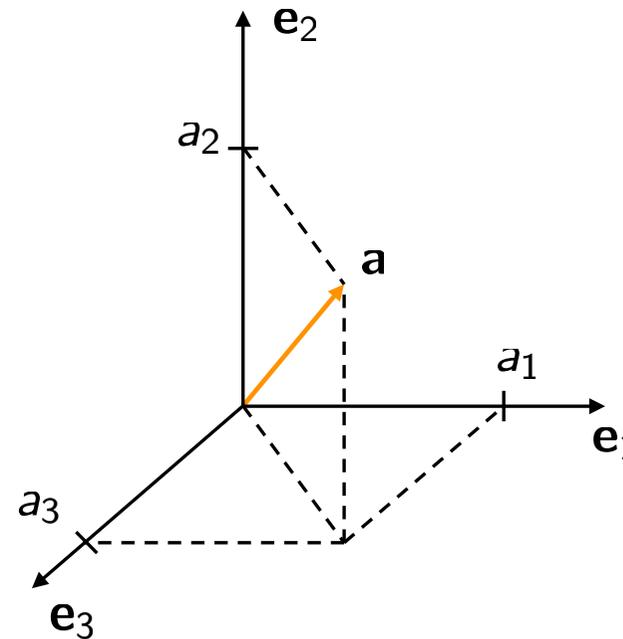
<http://www.falstad.com/dotproduct/>

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$$

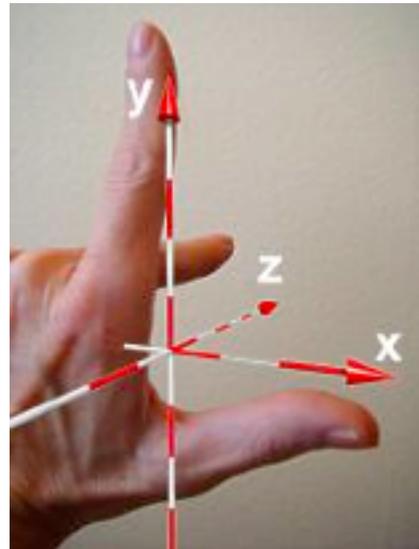
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 =: a_1$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 =: a_2$$

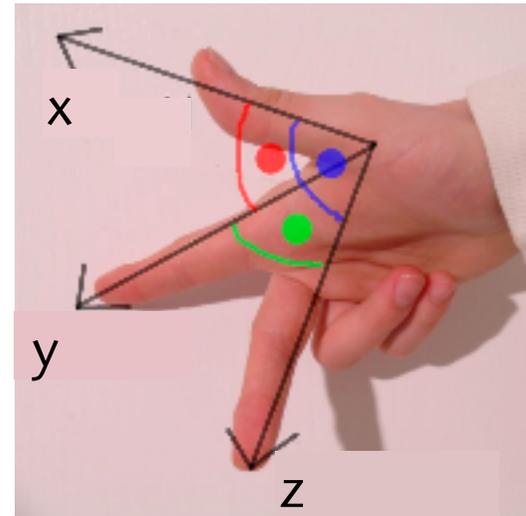
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 =: a_3$$



$$\mathbf{a} = a_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2 \cdot \mathbf{e}_2 + a_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$



left handed system
(Linkssystem)



right handed system
(Rechtssystem)

Achtung: wir verwenden *immer* das rechtshändige Koordinatensystem! (es sei denn, es steht etwas anderes da)

Ungleichungen für das Skalarprodukt

- Schwarz-Ungleichung:

$$\|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$$

- Dreiecksungleichung:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$$

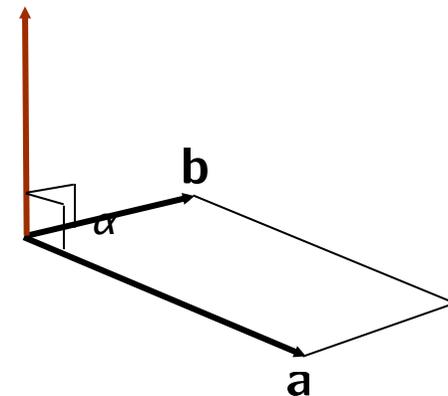
Das Kreuzprodukt (*cross product*)

- Definition:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

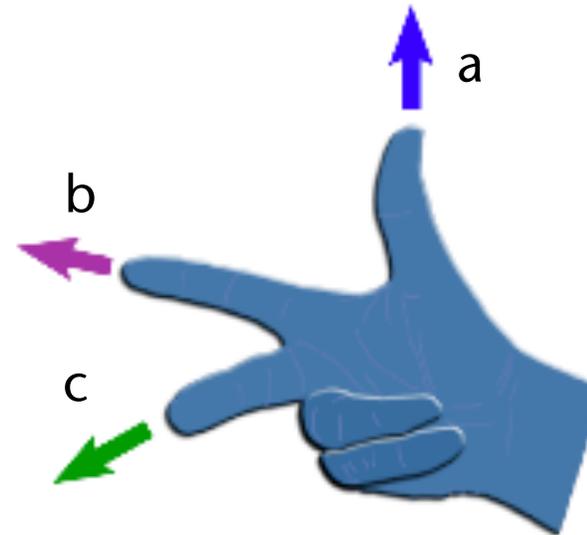
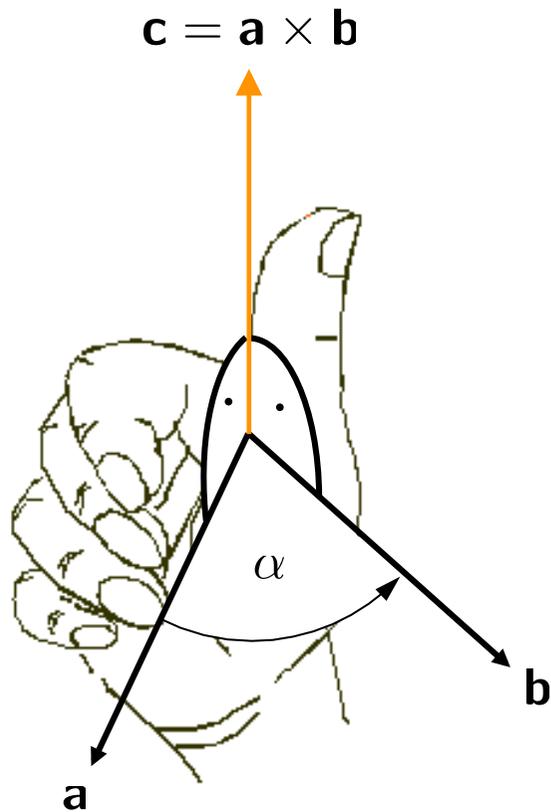
- Ergebnis ist ein Vektor, der senkrecht auf beiden Vektoren steht
- Länge des Vektors = Flächeninhalt des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogramms:

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$$



- Nützlich zur Erstellung von Koordinatensystemen (dazu später)

- Eselsbrücke: **Rechte-Hand-Regeln**

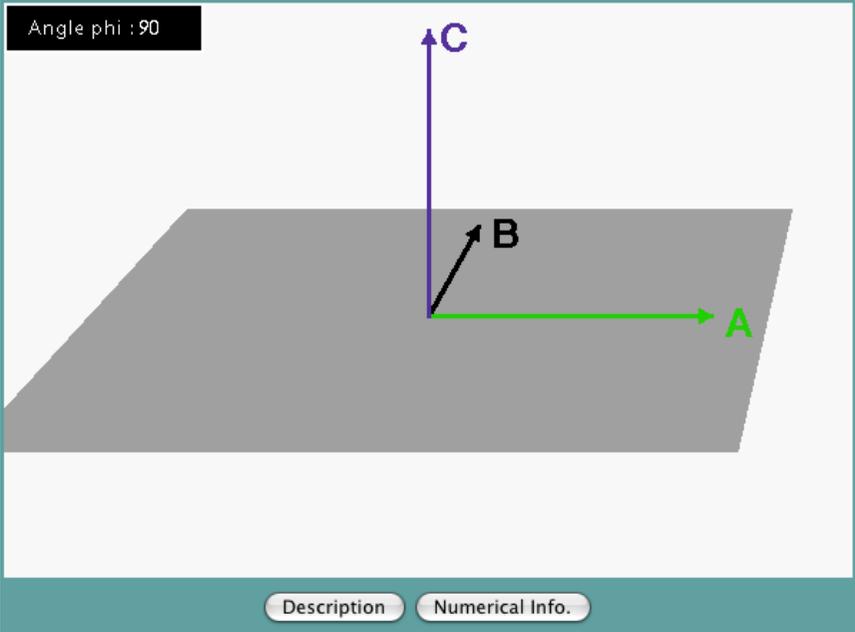


Vector Cross Product - JAVA Interactive Tutorial

file:///Users/zach/Documents/Lehre/CG1/demos Google

The Vector Cross Product - A JAVA Interactive Tutorial

Just below you will see a drawing; the vector labeled c is being calculated according to your specifications for the vectors a and b . You move these by clicking on their tips and dragging them around the plane with the mouse. You can also "spin the plane" by clicking and dragging on other parts of the picture.



Angle phi : 90

Description Numerical Info.

Display a menu

<http://www.phy.syr.edu/courses/java-suite/crosspro.html>

- Eigenschaften:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = +\mathbf{z} \quad \mathbf{y} \times \mathbf{z} = +\mathbf{x} \quad \mathbf{z} \times \mathbf{x} = +\mathbf{y}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (\text{antikommutativ / schiefsymmetrisch})$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\text{distributiv})$$

$$\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

- Es gilt die **Jacobi-Identität**:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$$

- Es gilt **nicht** die Assoziativität!

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

- Es gilt **nicht** das Auslöschungsgesetz!

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \not\Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

- Zusammenhang zwischen den Beträgen von Kreuz- und Skalarprodukt:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$$

- Das Kreuzprodukt lässt sich auch als Matrix-Vektor-Produkt schreiben
 - Definiere dazu die zum Vektor \mathbf{a} duale (**schiefsymmetrische**) Matrix \mathbf{a}^\times :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}^\times \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

- Die Darstellung mit schiefsymmetrischer Matrix hat viele Vorteile, u.a.:

- $\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

aber

$$\mathbf{a}^T \cdot (\mathbf{b}^\times \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}^\times) \cdot \mathbf{c}$$

- $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

aber

$$\mathbf{a}^\times (\mathbf{b}^\times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^\times \mathbf{b}^\times) \mathbf{c}$$

- Fazit: bei der Schreibweise mit schief-symmetrischer Matrix \mathbf{a}^\times gilt die Assoziativität!

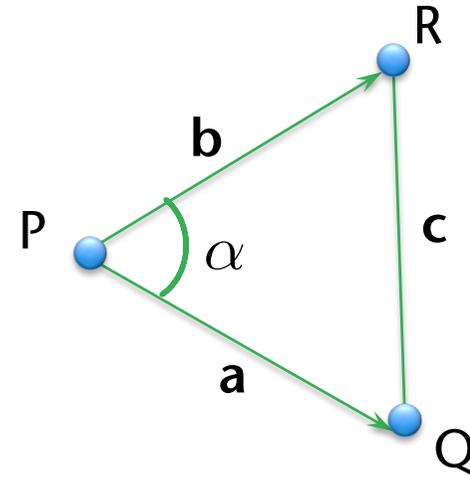
- Zusammenhang zwischen Kreuzprodukt und Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

- Heißt auch "*triple product expansion*", "*triple cross product identity*" oder **Graßmann-Identität** oder **Graßmannscher Entwicklungssatz**
 - Eselsbrücke: "ABC = BAC- CAB" ("erst backen, dann kappen")
 - Oder: alle zyklischen Permutationen von A,B,C

- Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$\begin{aligned}
 A(\triangle PQR) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin \alpha \\
 &= \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|
 \end{aligned}$$



- Erweiterung: Flächeninhalt mit Vorzeichen

$$A(\triangle PQR) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , P, Q, R \text{ gegen Uhrzeigersinn} \\ -\frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| & , P, Q, R \text{ im Uhrzeigersinn} \end{cases}$$

- Achtung: dies ist eine **reine Konvention** / Definition – sie ist in keiner Weise der Geometrie inhärent!! (aber eine sehr praktische Konvention)

- Satz:

Sei PQR ein Dreieck und S ein **beliebiger** Punkt in derselben Ebene.

Dann gilt:

$$A(\triangle PQR) = A(\triangle SPQ) + A(\triangle SQR) + A(\triangle SRP)$$

- Bezeichnung: $\square PQRS =$ Viereck (*quadrangle, quadrilateral*)

■ Beweis:

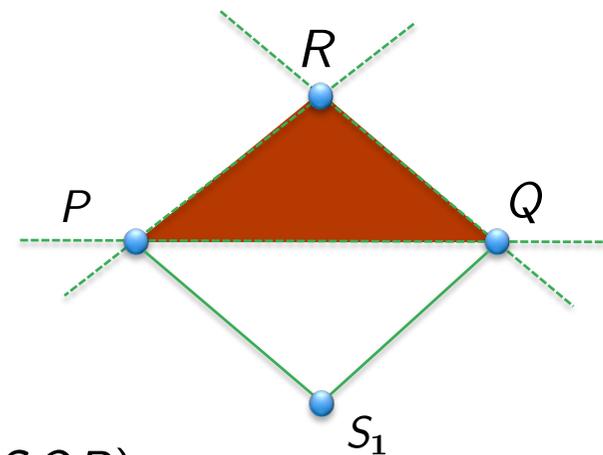
- Fall: S liegt im Inneren des Dreiecks
→ Behauptung ist klar

- Also: S liege außerhalb des Dreiecks
- Annahme: $S = S_1$
- Klar ist:

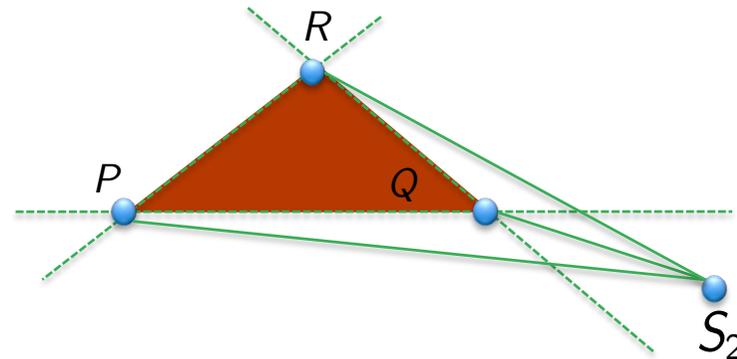
$$A(\triangle PQR) = A(\square PSQR) - A(\triangle SQP)$$

⇒ Behauptung

- Plausibilitäts-Check: $A(\triangle SPQ) < 0$



- Annahme: $S = S_2$
 - Dann ist $A(\triangle SPQ) < 0$
und $A(\triangle SQR) < 0$
und $A(\triangle PQR) = A(\triangle SRP) - A(\triangle SQP) - A(\triangle SRQ)$
- ⇒ Behauptung



- Falls S in einer der anderen Regionen liegt, folgt die selbe Behauptung durch Umbenennen der Ecken des Dreiecks

- Der Flächeninhalt als Determinante:

$$A(\triangle PQR) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} P_x & P_y & 1 \\ Q_x & Q_y & 1 \\ R_x & R_y & 1 \end{pmatrix}, \quad P, Q, R \in \mathbb{R}^2$$

- Beweisskizze:

- P, Q, R in \mathbb{R}^3 einbetten mit jew. $z = 0$
- Determinante ausrechnen und mit der z-Komponente von

$$(Q - P) \times (R - P)$$

vergleichen

- Definition (Ohr):

Sei V^1, \dots, V^n ein überschneidungsfreies Polygon in einer Ebene.

Eine Ecke V^i heißt "Ohr" gdw. die Strecke $V^{i-1}V^{i+1}$ komplett im Inneren des Polygons liegt.

- Satz (ohne Beweis):

Jedes überschneidungsfreie Polygon in einer Ebene hat **mindestens 2 Ohren**.

- Satz (Fläche eines Polygons):

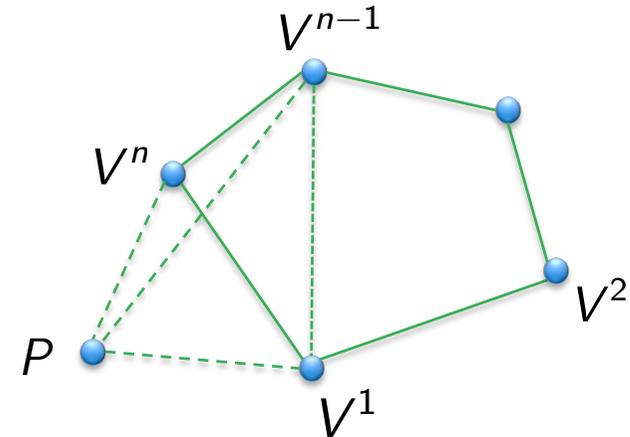
Für jedes geschlossene, überschneidungsfreie Polygon V^1, \dots, V^n und einen beliebigen Punkt P in der Ebene gilt:

$$A(\text{Polygon}) = \sum_{i=1}^n A(\triangle PV^iV^{i+1}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n V_x^i V_y^{i+1} - V_y^i V_x^{i+1}$$

- Beweis: Teil 1
 - Induktionsanfang: $n = 3$
Aus Satz auf Seite 25 \Rightarrow

$$A = A(PV^1V^2) + A(PV^2V^3) + A(PV^3V^1)$$

- Induktionsschritt: $n > 3$
 o.B.d.A. ist $V^n = \text{Ohr}$
 (sonst die V^i umnummerieren)
 Nun gilt:



$$A = \sum_{i=1}^{n-2} A(PV^iV^{i+1}) + A(PV^{n-1}V^1) + A(V^1V^{n-1}V^n)$$

Induktionsvoraussetzung

||

$$A(PV^1V^{n-1}) + A(PV^{n-1}V^n) + A(PV^nV^1)$$

⇒ Behauptung

- Beweis Teil 2:

$$A(PV^i V^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2} (V^i - P) \times (V^{i+1} - P)$$

Wähle $P = 0 \Rightarrow$

$$A(PV^i V^{i+1}) = \text{z-Komponente von } \frac{1}{2} V^i \times V^{i+1}$$

\Rightarrow Behauptung

Geometrische Prädikate (Tests)

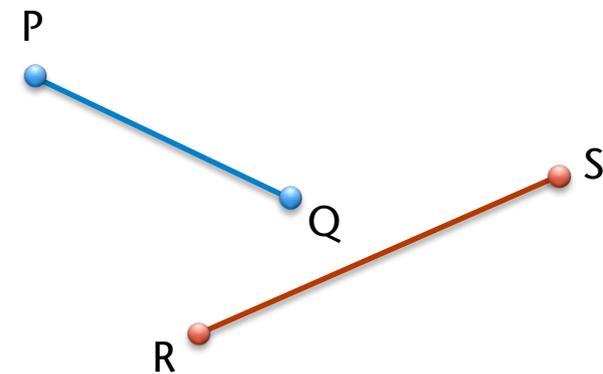
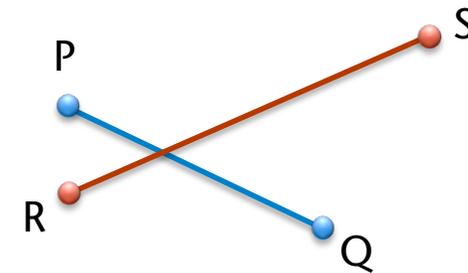
- Frage: sind zwei Kanten \overline{PQ} und \overline{RS} parallel?
- Lösung:
 - \overline{PQ} parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow (Q - P) \times (S - R) = 0$
 - \overline{PQ} parallel zu $\overline{RS} \Leftrightarrow \frac{(Q - P)}{\|(Q - P)\|} \cdot \frac{(S - R)}{\|(S - R)\|} = 1$
- Beachte die numerische Robustheit!

- Frage: schneiden sich zwei koplanare Kanten?
- Das Prädikat: " \overline{PQ} und \overline{RS} schneiden sich" kann man mathematisch so fassen:

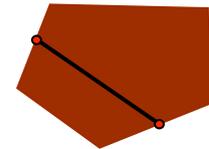
$$(\overline{PR} \times \overline{PQ}) \cdot (\overline{PQ} \times \overline{PS}) > 0$$

und

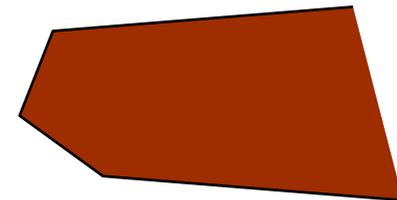
$$(\overline{RQ} \times \overline{RS}) \cdot (\overline{RS} \times \overline{RP}) > 0$$



- Definition **Konvexität** (eine von vielen möglichen):
Ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^k$ ist **konvex** \Leftrightarrow
für alle $P_1, P_2 \in G$ die gesamte Linie $\overline{P_1 P_2} \subseteq G$ ist.



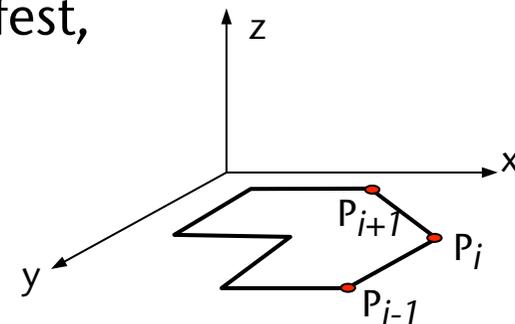
- Bemerkung:
 - Das Gebiet muß nicht beschränkt sein
 - Die Aussage "ein Polygon ist konvex" meint eigtl., daß das von dem Polygon umschlossene Gebiet (inkl. Rand) konvex ist



- Aufgabe: stelle für ein gegebenes Polygon fest, ob es konvex ist?
 - Lösung: berechne an jeder Ecke

$$\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_{i+1}, \quad \mathbf{v}_i = P_{i+1} - P_i$$

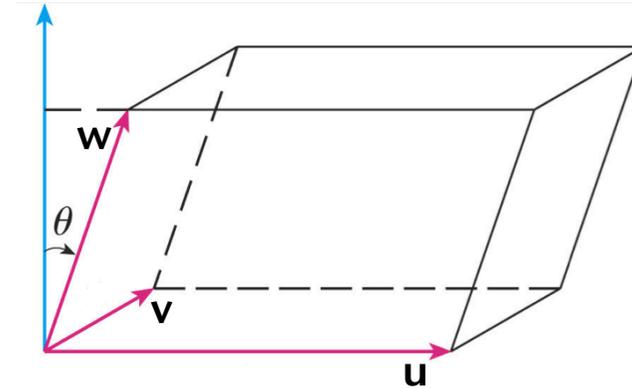
und teste Vorzeichen der z-Komponente



- Häufige Aufgabe:
 - Ein Vektor \mathbf{a} ist gegeben (z.B. Blickrichtung)
 - Erstelle dazu eine Orthonormalbasis
- Nicht eindeutig, aber oft genügt irgendeine Orthonormalbasis
- Algo:
 1. Setze $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$
 2. Für \mathbf{u} und \mathbf{v} benötigen wir irgend einen Vektor \mathbf{t} , der nicht kollinear zu \mathbf{w} ist;
z.B. setze $\mathbf{t} := \mathbf{w}$, und ersetze die betragsmäßig kleinste Komponente durch 1
 3. Setze $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{w}}{|\mathbf{t} \times \mathbf{w}|}$ $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{u}$

- Definition:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



- Englische Begriffe:

scalar triple product, triple product, mixed product,

- Geometrische Interpretation:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = |(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}|$$

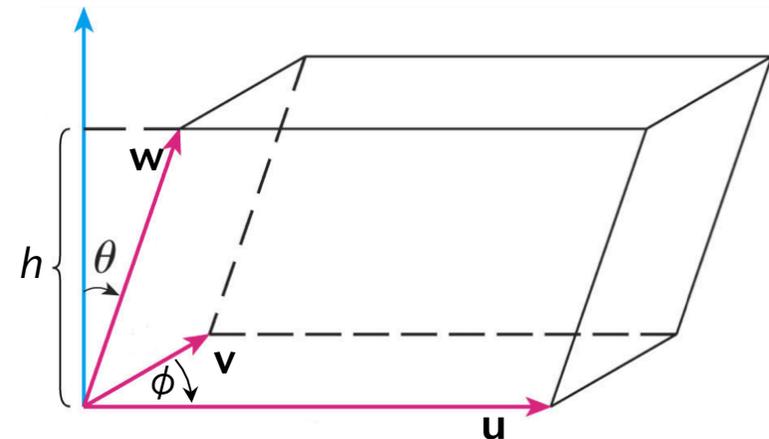
- Beweis:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}$$

$$= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \phi \|\mathbf{w}\| \cos \theta$$

$$= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| \cos \theta$$

$$= \|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}\|$$



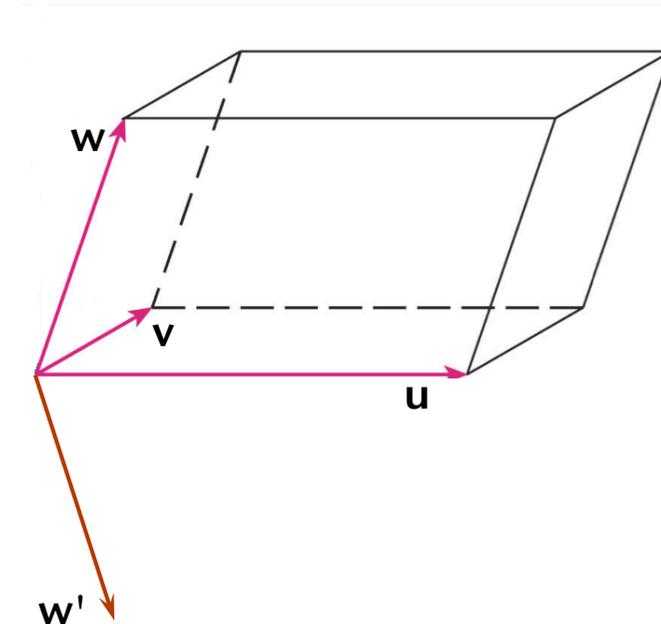
- Erweiterung des Volumens um ein Vorzeichen:

$$\text{Vol}(\text{Spat}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

- $\text{Vol}(\text{Spat}) > 0 \Leftrightarrow$
 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ bilden ein Rechtssystem \Leftrightarrow
Winkel zwischen $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ und $\mathbf{w} < 90^\circ$

- Bemerkung:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix}$$



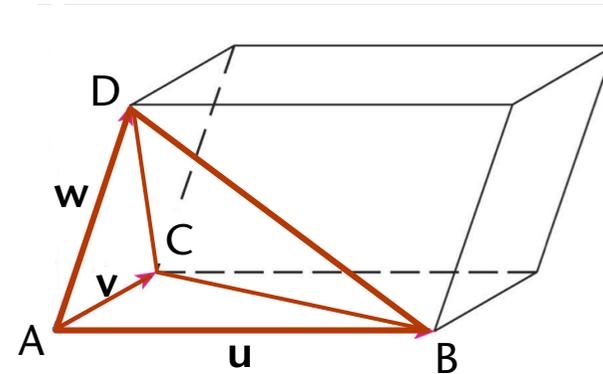
Denksportaufgabe

- Wenn man einen Würfel in Tetraeder zerschneidet, wieviele Tetraeder erhält man dann?

Das Volumen eines Tetraeders

- Es gilt:

$$\text{Vol}(ABCD) = \frac{1}{6} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$



$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} - & \mathbf{u} & - \\ - & \mathbf{v} & - \\ - & \mathbf{w} & - \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} B - A \\ C - A \\ D - A \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \det \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z & 1 \\ B_x & B_y & B_z & 1 \\ C_x & C_y & C_z & 1 \\ D_x & D_y & D_z & 1 \end{pmatrix}$$

- Bemerkung: so bekommt auch das Volumen ein Vorzeichen!
 - Und die Punkte A, B, C, D einen "Umlaufsinn"!
- Achtung: ein Dreieck im 3D hat keinen Umlaufsinn per se!

- **Koplanarität:**

Drei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} sind koplanar \Leftrightarrow

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$$

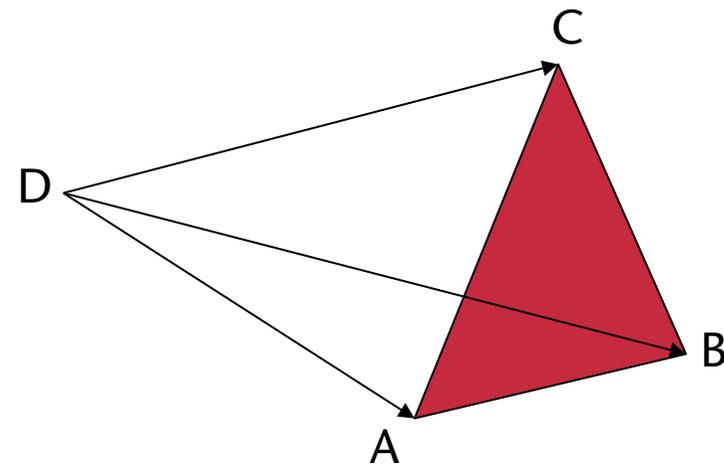
- **Umlaufsinn im 3D:**

Drei Punkte A , B , C erscheinen von einem vierten Punkt D aus entgegen dem Uhrzeigersinn \Leftrightarrow

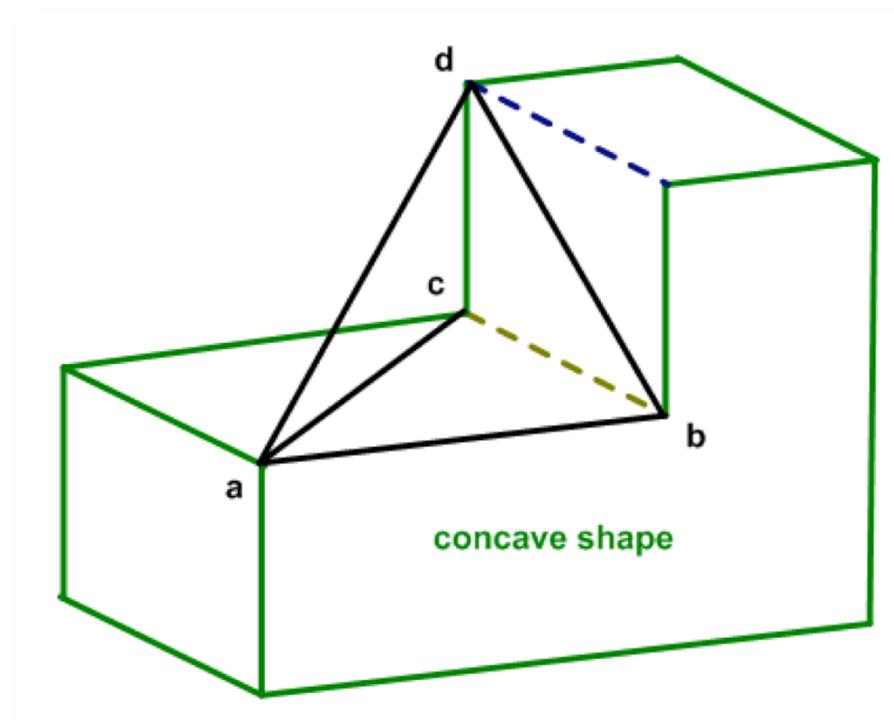
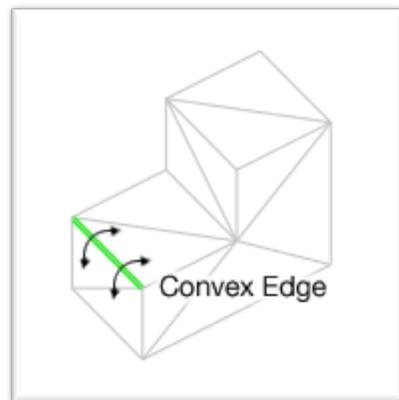
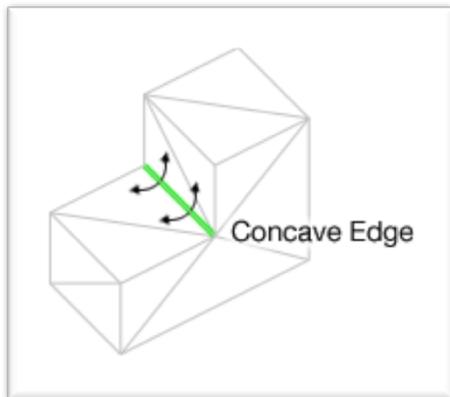
$$(A - D) \times (B - D) \cdot (C - D) < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Vol}(DACB) < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Vol}(ABCD) < 0$$



- Test auf Konvexität / Konkavität einer Kante:



- Wann liegt ein Punkt P im Inneren eines Tetraeders?

Genau dann, wenn die Vorzeichen von

$$\text{Vol}(ABCD)$$

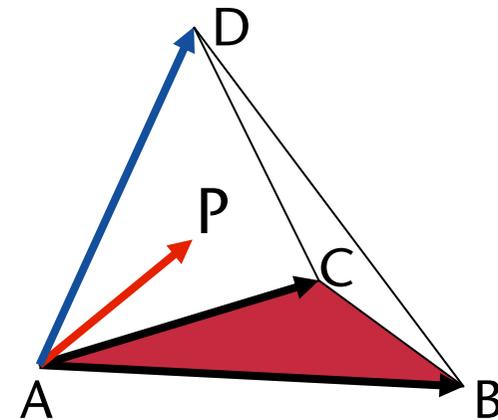
$$\text{Vol}(PBCD)$$

$$\text{Vol}(APCD)$$

$$\text{Vol}(ABPD)$$

$$\text{Vol}(ABCP)$$

alle gleich sind!



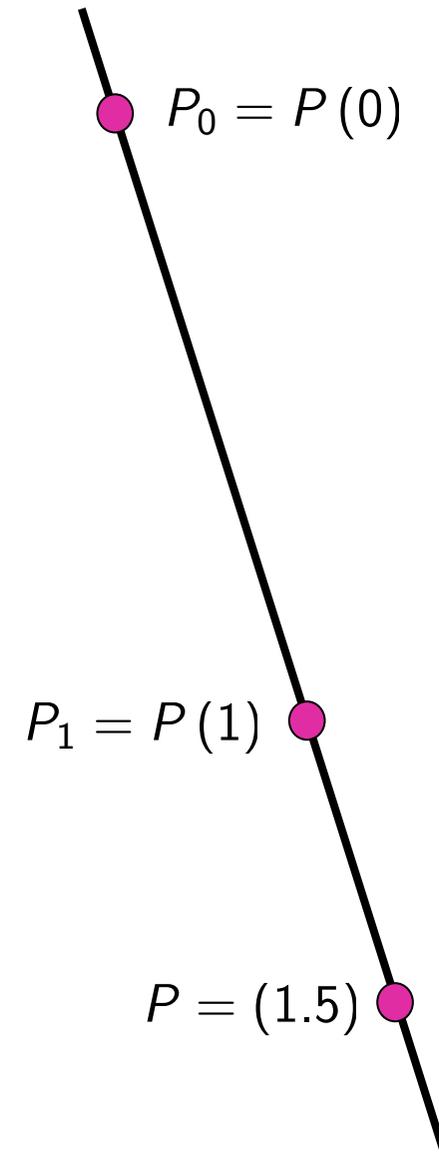
Parametrische Geraden (*parametric line*)

- Definition einer Geraden,
die durch zwei Punkte geht:

$$P_0 = (x_0, y_0), \quad P_1 = (x_1, y_1)$$

$$P(t) = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

- Interpretation:
starte bei einem Punkt P_0 , mache einen
Schritt t entlang dieser Gerade
von P_0 in Richtung P_1



- Häufige Aufgabe in CG
 - Punkte, Farben, Höhen, etc., irgendwie interpolieren

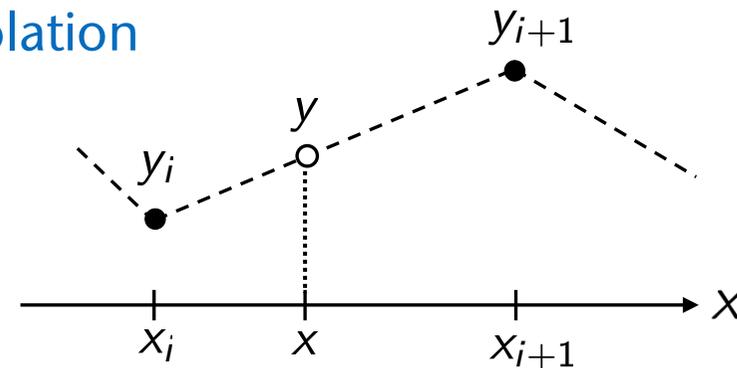
- Die Gerade

$$p(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1 - t)P_0 + tP_1$$

ist schon lineare Interpolation im n -dim. Raum

- Variante: **stückweise lineare Interpolation**

- Gegeben x_i, x_{i+1} und y_i, y_{i+1}
(= Höhe oder andere Semantik)
- Gesucht y für $x \in [x_i, x_{i+1}]$
- Lineare Interpolation:



$$t := \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \in [0, 1] \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$y = (1 - t)y_i + ty_{i+1}$$

- Durch 3 Punkte wird eine Ebene aufgespannt

- Parameterdarstellung:

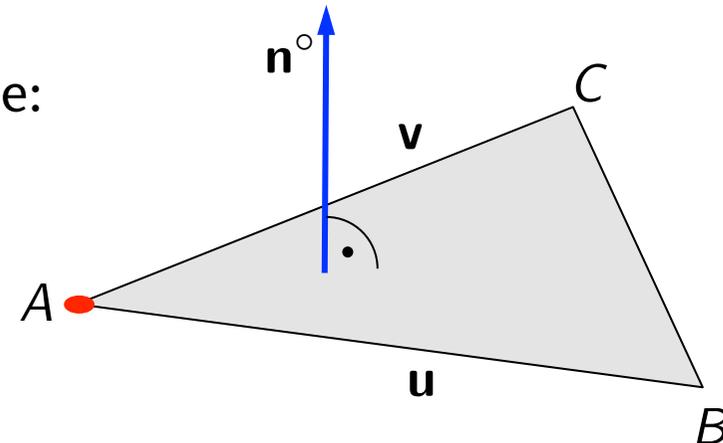
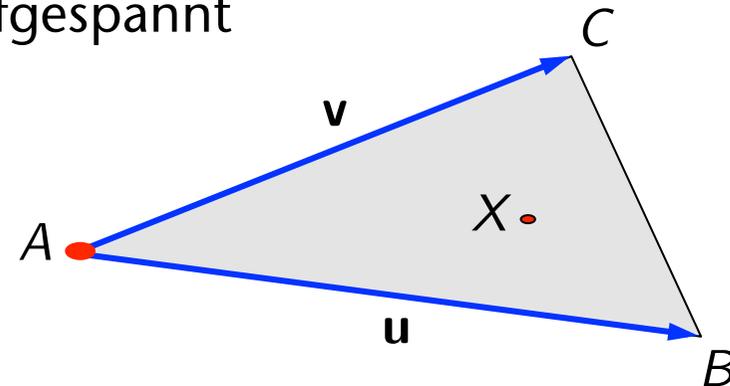
$$X = A + s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{v}$$

- Für Dreiecke gilt zusätzlich:

$$s, t \in (0, 1), \quad s + t \leq 1$$

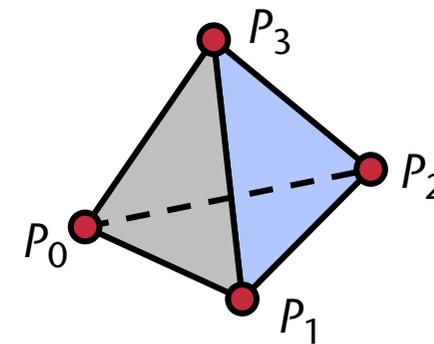
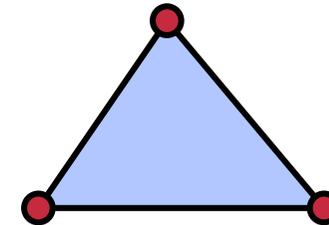
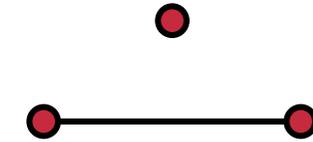
- Normale eines Dreiecks / einer Ebene:

$$\mathbf{n}^\circ = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|}$$



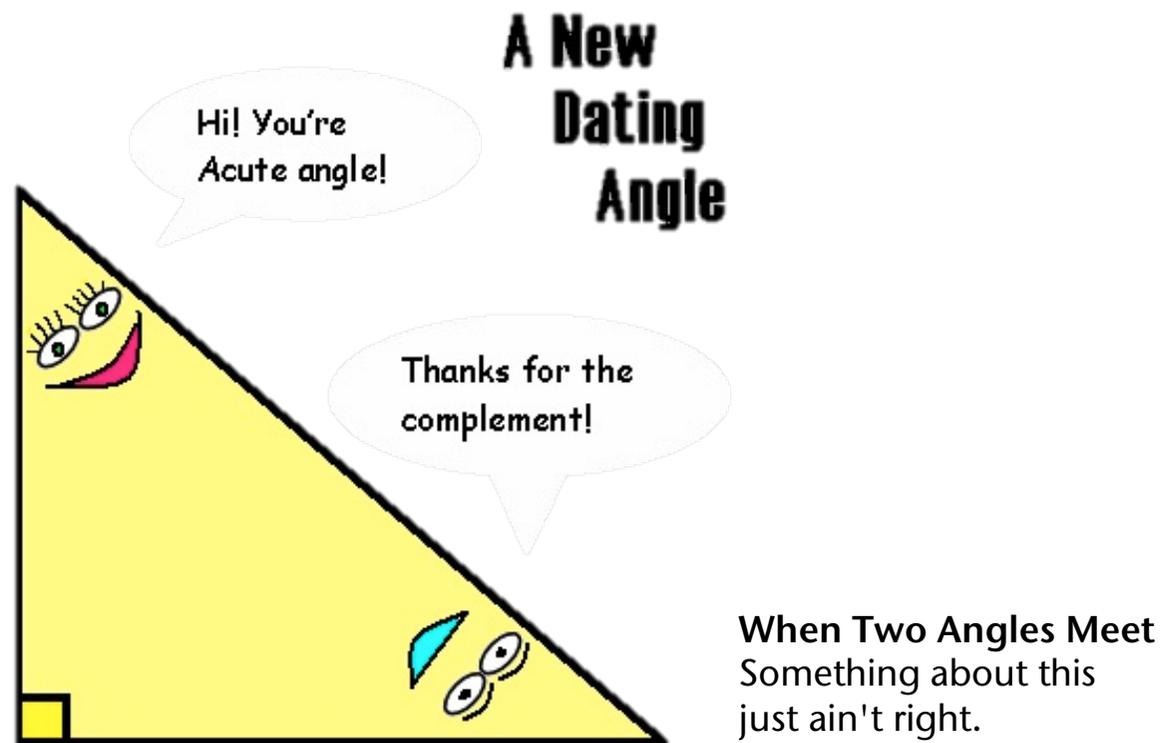
Exkurs: Verallgemeinerung = Simplex im \mathbb{R}^d

- **Simplex** :=
 - $d + 1$ **affin unabhängige** Punkte
 - Verbindung dieser Punkte + "Inneres"
- **Beispiele:**
 - 0D: Punkt
 - 1D: Linie
 - 2D: Dreieck
 - 3D: Tetraeder
- **Allgemein:**
 - Punkte P_0, \dots, P_d
 - Simplex = alle Punkte X mit

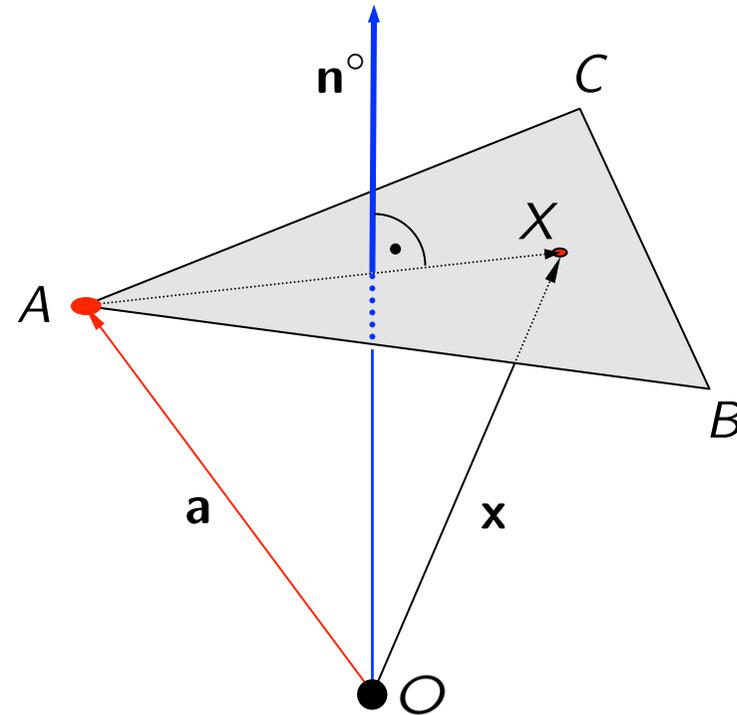


$$X = P_0 + \sum_{i=1}^d s_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}_i = P_i - P_0, \quad s_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^d s_i \leq 1$$

- Terminologie:
 - "*angle*" = Winkel (fig. Blickwinkel)
 - "*acute angle*" = spitzer Winkel
 - "*obtuse angle*" = stumpfer Winkel



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ (X - A) \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}^\circ &= 0 \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}^\circ - d &= 0 \end{aligned}$$



- Interpretation:
 - Gerade durch den Ursprung in Richtung \mathbf{n}°
 - Jeder Punkt X ist ein Punkt der Ebene, gdw. er auf diese Gerade projiziert den gleichen Abstand vom Ursprung hat, wie die Projektion von A auf diese Gerade

- Mini-Lemma:

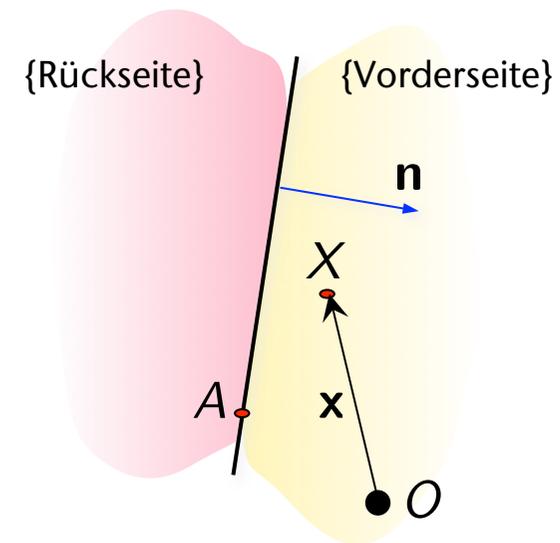
Eine Ebene (\mathbf{n}, d) im \mathbb{R}^k definiert

3 Äquivalenzklassen:

"Vorderseite" $:= \{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d > 0\}$

"Rückseite" $:= \{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d < 0\}$

Ebene $:= \{X \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - d = 0\}$



- Warum ist die Beschriftung korrekt?

- Weil

$$(X - A) \cdot \mathbf{n} = |X - A| \cdot |\mathbf{n}| \cdot \cos \theta$$

Homogeneous representation of line

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow (a, b, c)^T$$

A point $x = (x, y, 1)^T$ lies on the line $l = (a, b, c)^T$

$$x^T l = l^T x = 0$$

equivalently,

$$x \cdot l = l \cdot x = 0$$

Intersection of two lines $l = (a, b, c)^T$ and $l' = (a', b', c')^T$

$$x^T l = x^T l' = 0 \Rightarrow x = l \times l'$$

Line through two points $x = (x, y, 1)^T$ and $x' = (x', y', 1)^T$

$$l^T x = l^T x' = 0 \Rightarrow l = x \times x'$$

Duality of point and line

- Points and lines can be swapped.

